

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2021-2022

Prova scritta in aula del 10.01.2023

Parte II - Testo I

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità C , M_C .

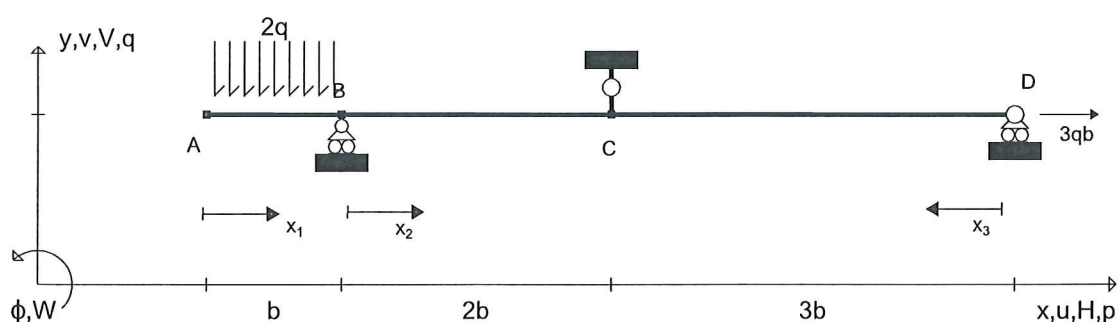
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, lo spostamento verticale del punto A , v_A .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 10.01.23*001



EQ. DI CONSULENZA $\Delta\phi_C = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

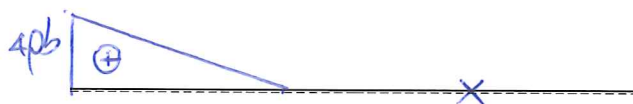
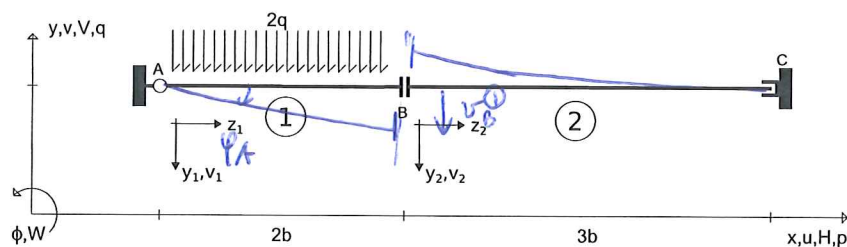
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

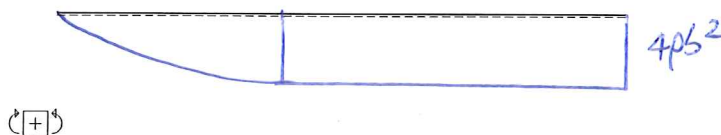
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto A , φ_A ;
4. Lo spostamento verticale del punto B relativo al primo tratto, $v_B^{(I)}$.

Università di Cagliari

SdC_SdA 10.01.23*001



$\uparrow (+) \downarrow$



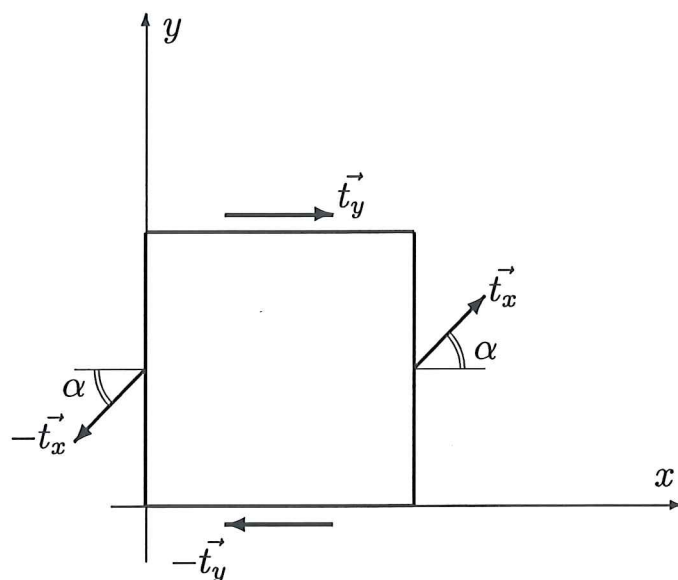
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= 4qb; & V_C (\uparrow) &= 0; & M_C (\curvearrowright) &= 4qb^2; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= 4qb - 2qz_1; & M_{AB} &= 4qbz_1 - qz_1^2; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= 0; & M_{BC} &= 4qb^2; \\
 \text{c.c in } A &= v_1(z_1=0) = 0; & \text{c.c in } B &= v_1'(z_1=2b) = v_2'(z_2=0); \\
 & \text{c.c in } C = v_2(z_2=3b) = 0; & & v_2'(z_2=3b) = 0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{2}{3}qbz_1^3 + \frac{1}{12}qz_1^4 + \frac{5}{3}qb^3z_1 \right); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(-2qbz_1^2 + \frac{1}{3}qz_1^3 + \frac{5}{3}qb^3 \right); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(-2qb^2z_2^2 + 12qb^3z_2 - 12qb^4 \right); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(-4qb^2z_2 + 12qb^3 \right); \\
 v_B^{(I)} &= \frac{92qb^4}{3EI} (\downarrow); & \varphi_A &= \frac{52qb^3}{3EI} (2)
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) t_x e t_y rispettivamente; di questi t_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 30^\circ$ (sicché $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$; $\sin \alpha = 1/2$) e ha modulo di valore $|t_x| = 100$ MPa. L'altro vettore sforzo, t_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

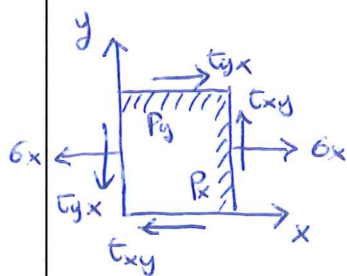
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$\sigma_x = 86,605$ (MPa); $\sigma_y = 0,000$ (MPa); $\tau_{xy} = 50,000$ (MPa);

$\sigma_1 = 108,145$ (MPa); $\sigma_2 = -22,842$ (MPa); $\tau_{\max} = 66,143$ (MPa);

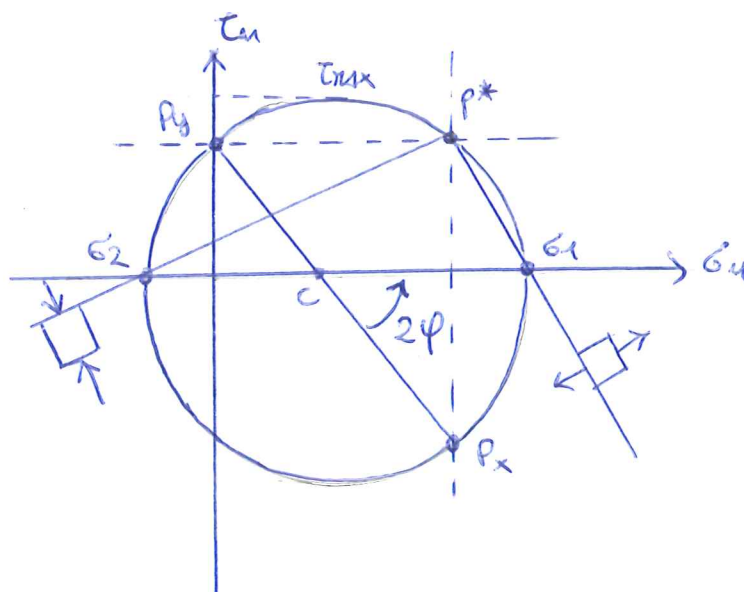
cerchio di Mohr:



$P_x = (86,605; -50,000)$

$P_y = (0,000; +50,000)$

$\varphi = 24,553$ (°);



CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2021-2022

Prova scritta in aula del 10.01.2023

Parte II - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità C, M_C .

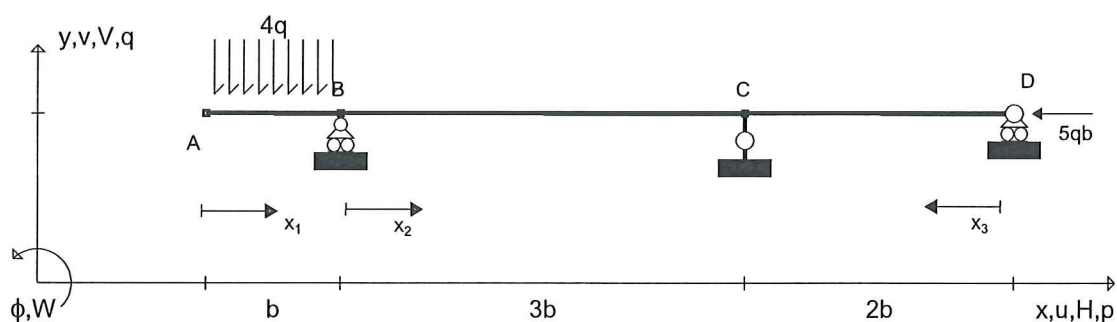
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, lo spostamento verticale del punto A, v_A .

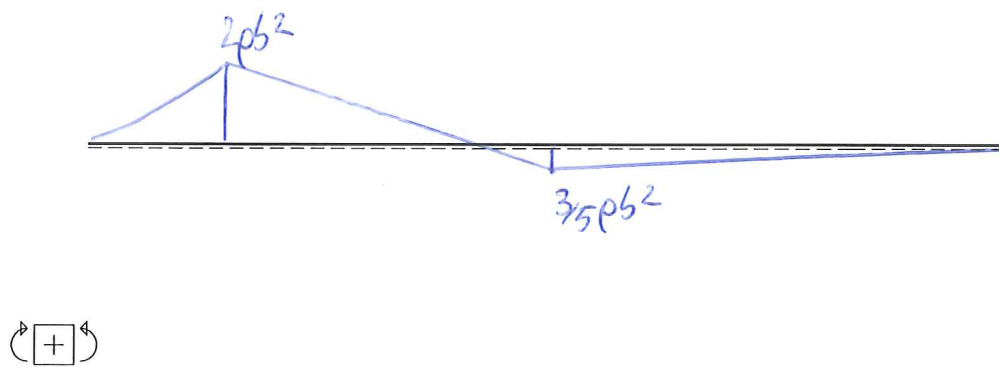
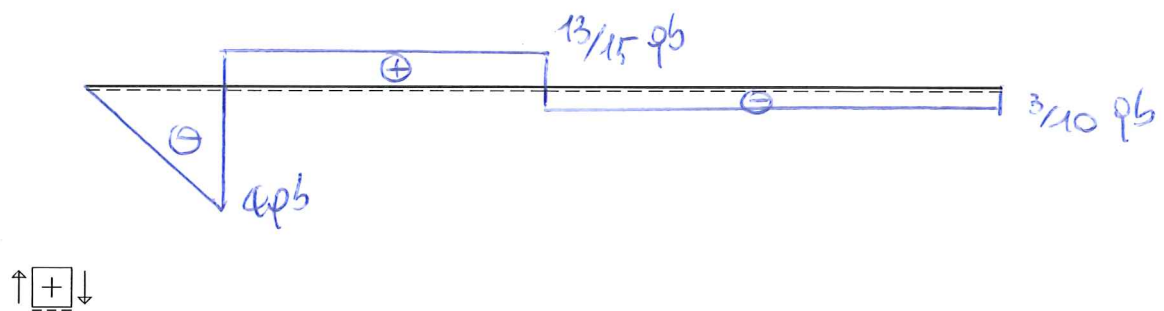
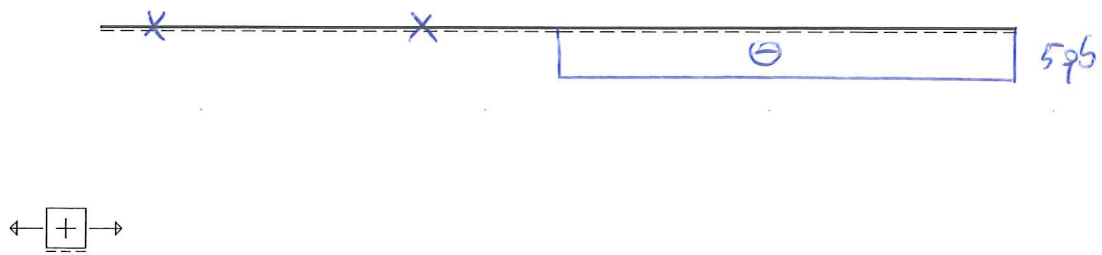
Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 10.01.23*002



EQ. DI CONQUENZA $\Delta\varphi_C = 0$



$$\begin{aligned}
 V_B(\uparrow) &= \dots\dots\dots \frac{73}{15}qb; & H_C(\Rightarrow) &= \dots\dots\dots 5qb; & V_C(\uparrow) &= \dots\dots\dots -7/6qb; & V_D(\uparrow) &= \dots\dots\dots \frac{3}{10}qb; & M_C(\curvearrowright) &= \dots\dots\dots \frac{3}{5}qb^2; \\
 N_{AB} &= \dots\dots\dots //; & T_{AB} &= \dots\dots\dots -4q \times 1; & M_{AB} &= \dots\dots\dots -2q \times 1^2; \\
 N_{BC} &= \dots\dots\dots //; & T_{BC} &= \dots\dots\dots \frac{13}{15}qb; & M_{BC} &= \dots\dots\dots -2qb^2 + \frac{13}{15}qb; \\
 N_{DC} &= \dots\dots\dots -5qb; & T_{DC} &= \dots\dots\dots -\frac{3}{10}qb; & M_{DC} &= \dots\dots\dots \frac{3}{10}qb \times 3; \\
 V_A &= \dots\dots\dots -\frac{11qb^2}{5}ED;
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 2 (7 punti)

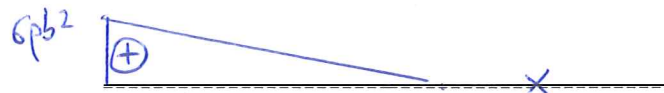
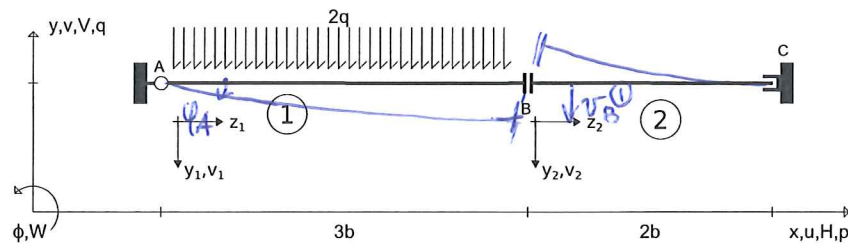
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

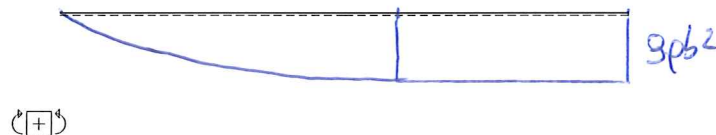
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto A , φ_A ;
4. Lo spostamento verticale del punto B relativo al primo tratto, $v_B^{(1)}$.

Università di Cagliari

SdC_SdA 10.01.23*002



↑ (+) ↓



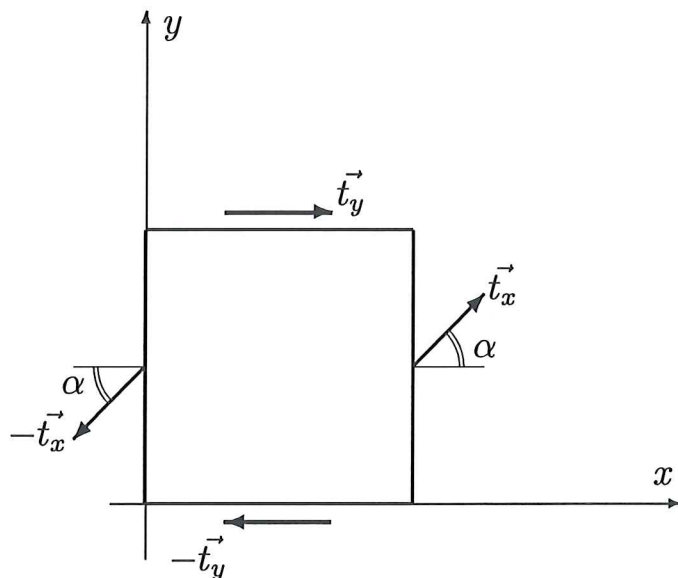
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= 6qb; & V_C (\uparrow) &= 0; & M_C (\curvearrowright) &= 3qb^2; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= 6qb - 2qz_1; & M_{AB} &= 6qbz_1 - qz_1^2; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= //; & M_{BC} &= 3qb^2; \\
 \text{c.c in } A &= v_1(z_1=0)=0; & \text{c.c in } B &= v_1'(z_1=3b)=v_2'(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in } C &= v_2(z_2=2b)=0; & v_2'(z_2=2b) &= 0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI}(-qbz_1^3 + \frac{1}{2}qbz_1^4 + 36qb^3z_1); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI}(-3qbz_1^2 + \frac{1}{2}qbz_1^3 + 36qb^3); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI}(-\frac{9}{2}qb^2z_2^2 + 18qb^3z_2 - 18qb^4); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI}(-9qb^2z_2 + 18qb^3); \\
 v_B^{(1)} &= \frac{117qb^4}{12EI} (\downarrow); & \varphi_A &= \frac{36qb^3}{EI} (2)
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) t_x e t_y rispettivamente; di questi t_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = -30^\circ$ (sicché $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$; $\sin \alpha = -1/2$) e ha modulo di valore $|t_x| = 100$ MPa. L'altro vettore sforzo, t_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

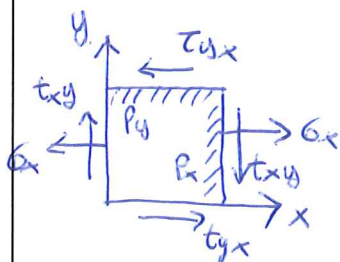
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = 86,605 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -50,000 \text{ (MPa)};$$

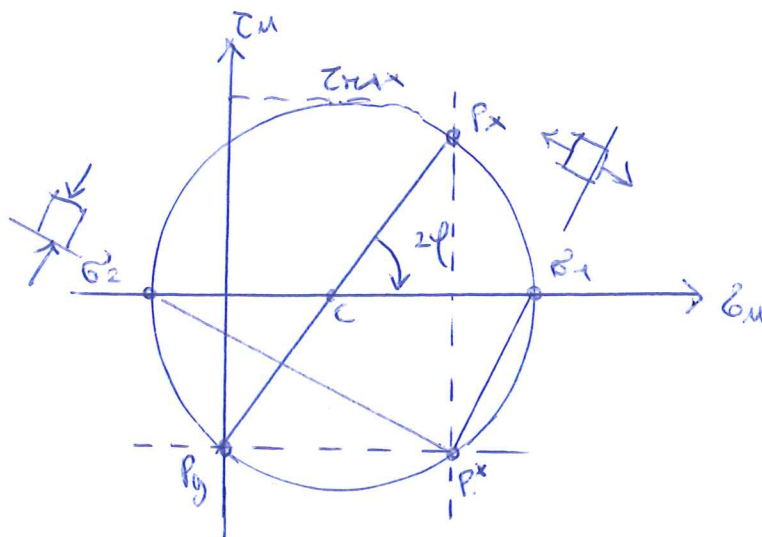
$$\sigma_1 = 108,445 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -22,842 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 66,143 \text{ (MPa)};$$

cerchio di Mohr:

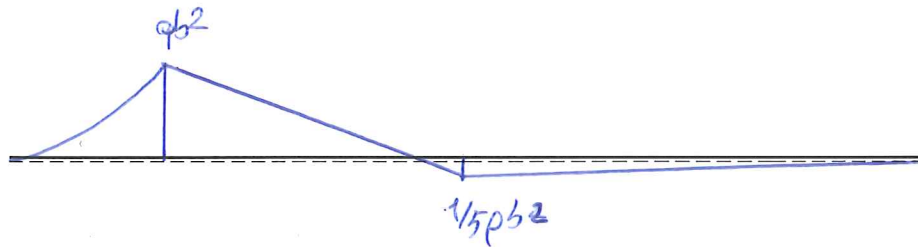
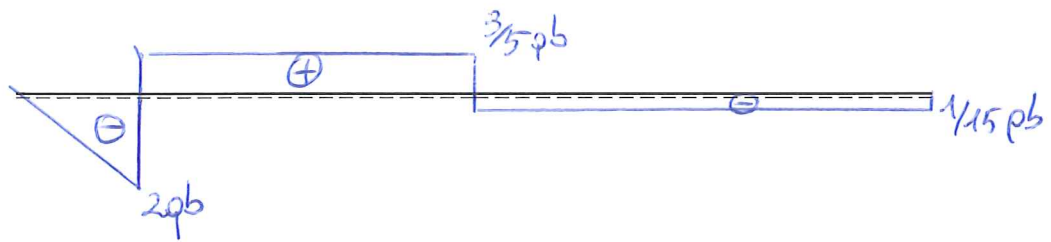
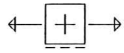
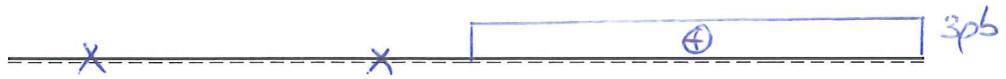


$$P_x = (86,605; 50,000)$$

$$P_y = (0,000; -50,000)$$



$$\varphi = -24,553 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$V_B(\hat{u}) = \dots\dots\dots \frac{13}{15}qb$	$H_C(\Rightarrow) = \dots\dots\dots -3qb$	$V_C(\hat{u}) = \dots\dots\dots -\frac{2}{3}qb$	$V_D(\hat{u}) = \dots\dots\dots \frac{1}{15}qb$	$M_C(\hat{x} \square \hat{y}) = \dots\dots\dots \frac{1}{15}qb^2$
$N_{AB} = \dots\dots\dots //$	$T_{AB} = \dots\dots\dots -2qx_1$	$M_{AB} = \dots\dots\dots -qx_1^2$		
$N_{BC} = \dots\dots\dots //$	$T_{BC} = \dots\dots\dots \frac{3}{15}qb$	$M_{BC} = \dots\dots\dots -qb^2 + \frac{3}{15}qb \times 2$		
$N_{DC} = \dots\dots\dots 3qb$	$T_{DC} = \dots\dots\dots -\frac{1}{15}qb$	$M_{DC} = \dots\dots\dots \frac{1}{15}qb \times 3$		
$V_A = \dots\dots\dots -\frac{17qb^4}{20ED}$				